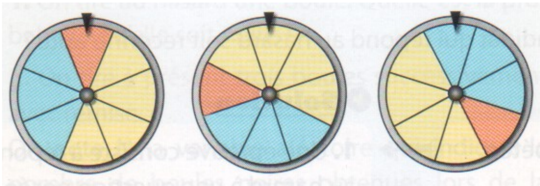
Loi binomiale

1. Rappel : Loi de probabilité

Exercice 7.1 Lors d'une fête foraine, on propose une loterie. Pour un joueur, la partie consiste à lancer successivement trois roues indépendantes. À l'arrêt des roues, un repère indique la couleur obtenue sur chacune d'elles.



Pour jouer, on achète un ticket à 12 €. La personne gagne un lot d'une valeur de :

- 1024 €, si les trois roues indiquent "rouge"
- 64 €, si les trois roues indiquent "bleu"
- 20 €, si les trois roues indiquent "jaune"
- 8 €, si les trois couleurs sortent.

sinon, il ne gagne rien.

1°) Construisez l'arbre pondéré associé à l'expérience aléatoire.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2°) On appelle G la variable aléatoire qui donne la valeur du lot obtenu.

(a) Déterminez la loi de probabilité de G

....
....
....
....

(b) Calculez E(G). Cette loterie est-elle favorable à l'organisateur ?

....
....
....
....

2. Épreuve de Bernoulli. Loi Binomiale

A. Épreuve de Bernoulli

Définition 7.1 On appelle *épreuve de Bernoulli* de paramètre *p* toute épreuve aléatoire admettant exactement deux issues.

- l'une appelée *succès*, dont la probabilité d'apparaître est *p*
- l'autre appelée *échec*, dont la probabilité d'apparaître est *1-p*

La loi de Bernouilli est donc résumée dans le tableau suivant (on note 0 l'échec et 1 le succès) :

x_i	0	1
$p(X = x_i)$	$1-p$	p

On dit que la variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre *p* et on note $X \sim \mathscr{B}(p)$.

Propriété 7.1 Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p. Alors :

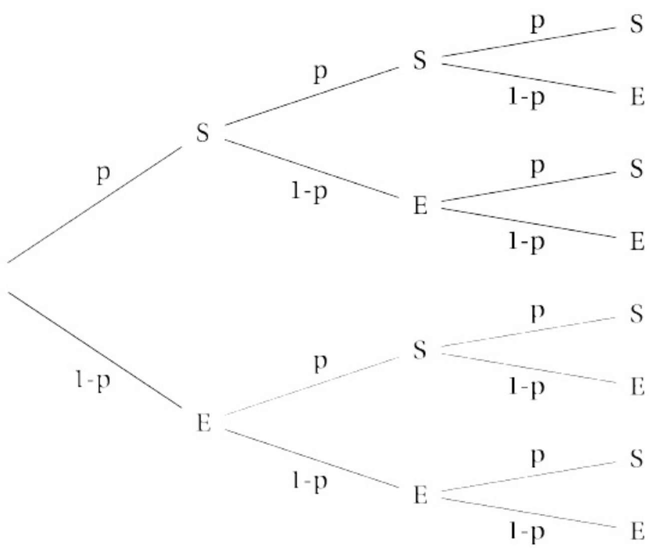
$$E(X) = p \quad ; \quad V(X) = p \times (1-p) \quad ; \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{p \times (1-p)}$$

Lorsque l'on **répète** une expérience de Bernoulli de façon **indépendante**, on obtient une **loi binomiale**.

B. Loi binomiale

Définition 7.2 On appelle *schéma de n épreuves de Bernoulli de paramètre* p toute expérience aléatoire consistant à répéter n fois de façon indépendante la même épreuve de Bernoulli de paramètre p.
Un résultat d'une telle expérience est une liste de n issues (SE...SSE), où l'on note S pour succès et E pour échec. La variable aléatoire associant à chaque issue le nombre k de succès est appelée *loi binomiale* de paramètres n et p.

Remarque 7.1 La représentation la plus courante d'un schéma de n épreuves de Bernoulli est un arbre pondéré :



En observant cet arbre, on remarque que pour $0 \leq k \leq 3$, chaque chemin menant à k succès et $3-k$ échec(s) a la même probabilité d'apparaître, c'est-à-dire $p^k \times (1-p)^{n-k}$. En notant $\binom{n}{k}$ le nombre de chemins aboutissant à k succès exactement (dans le cas d'une répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes) on obtient la propriété suivante :

Propriété 7.2 Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p. Alors on a :

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k \in \{0; 1; 2; ...; n\}$$

Exemple 7.1 On lance trois fois de suite un dé équilibré à six faces. On s'intéresse au nombre de "6" obtenus à l'issue des trois lancers. Le dé est équilibré et n'a pas de mémoire, donc il s'agit bien de la répétition de trois épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Le nombre de "6" est donc une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{6}$.
En utilisant l'arbre précédent, on constate qu'il y a trois chemins qui mènent à 2 succès et 1 échec, donc la probabilité d'obtenir exactement deux "6" est :

$$p(X = 2) = 3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{5}{72}$$

Propriété 7.3 (admise)
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p. Alors :

$$E(X) = np \quad ; \quad V(X) = np(1-p) \quad ; \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{np(1-p)}$$

C. À la calculatrice

La calculatrice permet de déterminer $p(X = k)$ et $p(X \leq k)$ directement. Dans le tableau ci-dessous on s'intéresse à une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0; 1]$ et avec k entier tel que $0 \leq k \leq n$.

	TI	Casio
Syntaxe	Touche 2nde, puis var ; dans l'onglet DISTRIB, faire défiler jusqu'à binomFdp(ou binomFRép(	Menu Distrib (2nde puis var), puis binomFdp ou binomFrép
$p(X = k)$	binomFdp : taper la valeur de : n, puis p, puis k	binomFdp(n,p,k)
$p(X \leq k)$	binomFRép : taper la valeur de : n, puis p, puis k	binomFRép(n,p,k)

Sur un tableur OpenOffice,
la fonction =LOI.BINOMIALE(k ;n ;p ;0) donne $p(X = k)$,
et la fonction =LOI.BINOMIALE(k ;n ;p ;1) donne $p(X \leqslant k)$.

Exercice 7.2 Un conseiller commercial en informatique reçoit huit clients par jour. On admet que la probabilité qu'un client passe commande est de $0,1$ et que les décisions des clients sont indépendantes les unes des autres.
On note X la variable aléatoire qui indique le nombre de commandes que le conseiller obtient par jour.

1. Justifiez que X suit une loi binomiale
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
2. Quelle est la probabilité (à 10^{-4} près) qu'il obtienne :
   (a) deux commandes ?
   ....
   ....
   ....
   ....
   (b) moins de deux commandes ?
   ....
   ....
   ....
   ....

Exercice 7.3 Un parcours hippique de trois kilomètres comporte huit obstacles du même type. À l'entraînement, ce parcours est réalisé à la vitesse de $15km.h^{-1}$. On estime que pour un cavalier, la probabilité qu'il franchisse sans faute un obstacle est de 0,625. Le passage sans faute ne ralentit pas le cavalier, alors qu'un passage avec faute lui fait perdre une minute. On note X la variable aléatoire qui indique le nombre d'obstacles franchis sans faute.

1. Précisez la loi de probabilité de X et indiquez son espérance.
2. Quel est le temps théorique de parcours exprimé en minutes ?
3. On note D la variable aléatoire qui indique la durée en minutes du parcours du cavalier.
   (a) Exprimez D en fonction de X
   (b) Déduisez-en $E(D)$ et interprétez le résultat

Exercice 7.4 Pour un archer, la probabilité d'atteindre une cible donnée est $0,7$. Les tirs sont supposés indépendants. Quelle est la probabilité qu'il touche trois fois la cible sur une volée de cinq flèches ?

Exercice 7.5 On s'intéresse au nombre d'enfants d'une famille. On suppose qu'il n'y a pas de naissances multiples et qu'il y a équiprobabilité pour la naissance d'un garçon ou d'une fille.
L'objectif final (donc après avoir résolu toutes les questions) de ce problème est de trouver le nombre minimum d'enfants afin que la probabilité d'avoir une fille dépasse 0,99.

1. On peut considérer la naissance d'un enfant comme une épreuve de Bernoulli dont les issues sont S : "naissance d'une fille" et $\overline{S}$: "naissance d'un garçon".
   (a) Quel modèle d'expérience décrit la naissance de n enfants dans une famille ?
   (b) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire qui indique le nombre de filles dans le cas de n naissances ?

....
....
....

2. On s'intéresse à l'événement A : "avoir au moins une fille sur les n naissances".
   Aide : Lorsque la définition de A contient la locution "au moins", il est en général plus facile de calculer $P(\overline{A})$.
   (a) Que signifie $\overline{A}$?
   ....
   ....
   ....
   ....
   (b) Calculez $P(\overline{A})$, puis déduisez-en que :
   $$P(A) = 1 - \frac{1}{2^n}$$
   ....
   ....
   ....
   ....
   (c) Trouvez le plus petit entier n tel que $P(A) > 0,99$
   ....
   ....
   ....
   ....

Exercice 7.6 Un restaurateur a constaté qu'au déjeuner neuf clients sur dix prennent un café. Huit clients se présentent pour déjeuner et commandent de façon indépendante. on note X la variable aléatoire égale au nombre de clients qui commandent un café sur l'ensemble des huit clients ayant déjeuné.

1. X suit une loi binomiale. précisez-en les paramètres.
   ....
   ....
   ....
   ....
2. Calculez la probabilité des événements suivants :
   (a) Un seul client prend un café
   ....
   ....
   ....
   ....
   (b) Exactement trois clients prennent un café.
   ....
   ....
   ....
   ....
   (c) Au moins un client prend un café
   ....
   ....
   ....
   ....
   (d) au plus quatre clients prennent un café
   ....
   ....
   ....
   ....

3. calculez et interprétez l'espérance de X

....

....

....

....

D. Coefficients binomiaux

Définition 7.3 Le nombre $\binom{n}{k}$, qui est le nombre de chemins menant à k succès dans un arbre à n branches, est appelé *coefficient binomial* $\binom{n}{k}$.

On peut déterminer $\binom{n}{k}$ à l'aide de la calculatrice.

Exemple 7.2 Le coefficient $\binom{6}{4}$ s'obtient ainsi :

- sur Casio : 6 OPTN PROB nCr 4
- sur TI : 6 math PRB Combinaison 4

Remarque 7.2 Pour n entier naturel non nul, en notant $n!$ le nombre $n \times (n-1) \times ... \times 2 \times 1$, et en posant $0! = 1$.
On a, pour n et k entiers naturels tels que $k \leq n$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \times (n-k)!}$$

Propriété 7.4 Pour tout entier n et tout entier k tels que $k \leq n$, on a :

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
2. si de plus $k < n$, alors : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Cette dernière formule est la "formule de Pascal".
Application : Le triangle de Pascal[1] : calcul des coefficients $\binom{n}{k}$

n \ p	0	1	2	3	4	...
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
...	...	...	...	...	...	..

Chaque nombre est obtenu en additionnant deux nombres de la ligne du dessus : celui de la même colonne, et celui de la colonne précédente.

Exercice 7.7 Utilisez le triangle de Pascal pour trouver l'entier n satisfaisant la condition imposée :
a) $\binom{n}{2} = 36$

....

....

....

....

b) $3\binom{n}{4} = 14\binom{n}{2}$

....

....

....

....

1. Blaise Pascal (1623-1662) : philosophe et mathématicien français. Il a notamment inventé *la Pascaline*, première machine à calculer mécanique. "Son" triqngle était en fait connu des mathématiciens persans du Moyen-âge (X° et XI° siècles), notamment par Omar Khayyam, qui l'utilisait pour développer $(a+b)^n$, ainsi que par les Chinois au XII° siècle...

3. Échantillonnage et estimation

A. Intervalle de fluctuation et prise de décision

Il s'agit ici de vérifier, quand on affirme qu'un caractère est présent dans une population à la fréquence p, de décider si cette affirmation est acceptable ou non.

Définition 7.4 Si $X \sim B(n;p)$, alors un **intervalle de fluctuation** au seuil ("marge d'erreur")* $1-\alpha$ ($0 \leqslant \alpha \leqslant 1$) de la fréquence p d'apparition du caractère est :

$$I = [\frac{k_1}{n}; \frac{k_2}{n}]$$

, où k_1 et k_2 sont les plus petits entiers vérifiant :
$P(X \leqslant k_1) > \frac{\alpha}{2}$ et $P(X \leqslant k_2) \geqslant 1 - \frac{\alpha}{2}$
* en général, on prend $\alpha = 0.05$ (seuil de 95%) ou $\alpha = 0.01$ (seuil de 99%)

Propriété 7.5 Avec les notations précédentes, la règle de décision pour savoir si l'hypothèse "le caractère est présent dans la population à la fréquence p" est acceptable est :
- Si la fréquence observée est dans I, hypothèse acceptable
- Sinon, hypothèse rejetée

Exercice 7.8 On lance une pièce 50 fois et on veut savoir si elle est bien équilibrée. Notre hypothèse concernant la fréquence de pile est $p = 0.5$. Après 50 lancers, on observe que l'on a obtenu 19 fois "pile".
a) Construire l'intervalle de fluctuation à 95% ($\alpha = 0.05$)

....
....
....
....
....
....
....

b) Doit-on rejeter l'hypothèse ? La pièce est-elle équilibrée ?

....
....
....
....

B. Intervalle de confiance et estimation

Ici on ne connaît pas la fréquence d'un caractère dans la population, mais on a pu la mesurer sur un échantillon. On essaie, à partir de la fréquence dans cet échantillon, d'estimer la fréquence dans la population totale.

Propriété 7.6 On note p la fréquence du caractère dans la population totale, F la fréquence dans l'échantillon, et n la taille de l'échantillon.
Alors, pour n suffisamment grand, p appartient à l'intervalle ci-dessous avec une probabilité d'au moins 95% :

$$\left[F - \frac{1}{\sqrt{n}}; F - \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

Exercice 7.9 Un sac contient un très grand nombre de boules rouges ou bleues indiscernables au toucher. On tire 100 boules, on obtient 41 boules rouges et 59 bleues. donner un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95% de la proportion de boules rouges dans le sac.

....
....
....
....
....
....